

第 25 日 : 5 月 13 日 (水) 教科書, LEGEND, ノートを用意して始めよう

4 定積分と体積 (教科書 p.244～)

これまで定積分を使う場面として面積計算を中心に扱ってきました。しかし、実は積分の応用範囲は遥かに広いのです。少しずつ、使える場面を広げていきます。面積の次の一步が体積です。

まず、教科書の p.224 から p.225 の 5 行目までを自分で読んで理解するように試みてください。そのあとで、一緒に教科書を読んでいきましょう。



教科書 p.224, 4 行目～6 行目

「立体図形の体積についても、区分求積法の考えを利用して定積分で表すことができる」とあります。広く応用しようと思えば、計算法ではなく、本来の定義である区分求積法に戻る必要があるのです。

教科書 p.224, 7 行目～12 行目

立体と x 軸の図が書いてあります。 x 軸が積分変数の軸です。面積を定積分を利用して計算するとき、積分変数軸に垂直な方向に切って切り口の長さを積分したように、体積を定積分を利用して計算するとき、積分変数軸に垂直な方向に切ったときの切り口の面積(断面積)を積分します。なぜそれで体積が計算できるのか、それをこれに続く部分で説明しています。

教科書の図では、 x 軸上の座標 x の位置で軸に垂直な平面を γ で表し、その平面で切った断面積を $S(x)$ で表しています。もし、立体が円柱で x 軸がその中心軸に平行ならば、切り口は常に一定の円で断面積は定数です。立体が三角柱なら、 x 軸を底面に垂直にとれば断面は常に底面と合同な三角形で断面積は定数になります。このように、「 $\bigcirc\bigcirc$ 柱」という形なら、底面に平行な平面で切った断面は常に底面に合同で、積分変数軸を底面に垂直にとれば、軸に対して垂直方向の断面積は定数です。したがって、「 $\bigcirc\bigcirc$ 柱」の体積は「(断面積) \times (高さ)」と、掛け算で計算できますね。

柱以外の一般の立体では、切る場所によって断面の形も異なり、断面積も一定ではありません。つまり、断面積 $S(x)$ は切る位置 x の関数です。

教科書 p.224, 13 行目～16 行目

その、 x の関数である断面積 $S(x)$ を端から端まで定積分することにより体積が計算できると主張しているのが 15 行目と 16 行目の 2 行にまとめてある式です。体積 (volume) を V で表しています。

教科書 p.224, 17 行目～p.225, 2 行目

ここからが、定積分で体積を表せる理由の説明です。積分変数軸の、立体の端から端までの区間 $[a, b]$ を分割します。あとで分割の数を増やせるように、 n 等分と文字で表しておきます。分割の数が多ければ多いほど、分割してできた小区間の幅は小さくなり、その小区間の中での立体の部分（教科書 p.224 の下の図の色のついた部分）は、どちらかの底面に厚みを付けた「柱」の形で近似できます。もちろん誤差がありますが、幅が狭いほど、誤差も小さいでしょう。「柱」の形なら、体積は掛け算で計算できます。

教科書を見てください。区間を分割した分点の x 座標を $x_0 (= a), x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n (= b)$ と表しています。分点 x_k の位置での断面積は $S(x_k)$ 、分けた小区間の幅は $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ だから、近似する薄い柱の体積は $S(x_k)\Delta x$ です。これをすべて足した値が p.225 の 2 行目の式で、

$$V_n = S(x_1)\Delta x + S(x_2)\Delta x + \dots + S(x_n)\Delta x = \sum_{k=1}^n S(x_k)\Delta x$$

です。

教科書 p.225, 3 行目～5 行目

この和は、本当の体積とはずれがあります。分割した小区間の中で「柱」で置き換えたものの体積だから、表面にギザギザができた立体の体積になっています。ここで、分割の数を限りなく増やしていけば、分割した小区間の幅は限りなく小さくなっていき、ギザギザはどんどん細かくなってやがて見えなくなっていくでしょう。分割の数 n を限りなく大きくしていったときに上の和が収束するならば、その極限值が真の体積を表しているに違いない、と考えます。これはまさに区分求積法による定積分でした。

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S(x_k)\Delta x = \int_a^b S(x)dx$$

どんなときに積分が使えるか、少しイメージができたでしょうか。

- 切り口の長さが定数ならば面積は掛け算。変化するときには、積分。
- 切り口の面積が定数ならば体積は掛け算。変化するときには、積分。
- 定数の場合に掛け算で表せる連続量に対して、変化するときには積分。

長方形の面積は（縦）×（横）と、掛け算で計算できるけれど、掛け算で計算できる量は面積だけではないように、曲線で囲まれた図形の面積は積分で計算できるけれど、積分で計算できる量は面積だけではありません。

柱の体積が（底面積）×（高さ）で計算できるように、立体の体積は断面積の積分で計算できます。等速直線運動の移動距離が（速さ）×（時間）で計算できるように、早さが変化する運動の移動距離は積分で計算できます。掛け算や割り算が小学校で教わるほどさまざまな量を扱う上で基本的な演算であるように、微分積分は変化する量を扱う上で基本的な計算法です。そして、現象を量的に把握する分野では、必ずといっていいほど、変化する量を扱っています。

では、教科書の例題を見てみましょう。

教科書 p.225

例題 14 底面の半径が r 、高さが h の直円錐の体積 V は、 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ で与えられることを示せ。

【解説】 結果だけなら、錐の体積は「（底面積）×（高さ）÷3」であることから、すでに知っていることです。これまでは、「なぜ3分の1か」という理由について、積分を用いて一般的に証明しようというのがこの例題です。

次の各段階に注意しながら、教科書の解答を読んでください。

（積分変数軸を設定する） x 軸として、頂点から底面に下した垂線を選んでいきます。教科書 p.225 の8行目から10行目です。

（断面積を x の関数として表す）「相似な図形で面積比は相似比の2乗」を利用しています。教科書 p.225 の11行目から18行目です。

（断面積を積分して体積を求める）積分の計算です。教科書 p.225 の19行目から20行目です。

解答のどの部分で何をしているのか、切り分けて把握しましょう。

【問題練習】教科書 p.225 **練習 35** を考えましょう。**例題 14** の底面が円から多角形に変わっただけで、同様の証明が通用することを確認してください。

この解答はほとんど例題 14 の解答をなぞることになるので、書きません。底面積が $S = \pi r^2$ ではなく、 S のままになるだけの違いです。

教科書 p.224 **応用例題 8** を読んでみましょう。文章を 1 行 1 行丁寧に読み、内容を把握すること。読み飛ばさないように。解答は、次の 3 ステップを意識して切り分けてみてください。

（積分変数軸の設定）

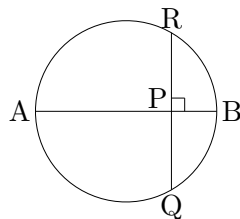
（断面積 $S(x)$ を x の関数として表す）

（断面積を積分して体積を求める）

応用例題 8 【解説】 問題文には図は描いてありません。問題を読みながら、自分で図を描いてどのような立体化を把握する必要があります。

問題文の 1 行目～3 行目 半径 a の円がある。この直径 AB 上の点 P を通り、直線 AB に垂直な弦 QR を底辺とし、高さが h である二等辺三角形を、円 O の面に対して垂直に作る。

まず、弦 QR まで図を描いてみます。



この弦 QR の上に、紙面に垂直に、底辺 QR、高さ h の二等辺三角形を立てるといわけです。その三角形の面積は、 $\frac{1}{2} \cdot QR \cdot h \dots \dots \textcircled{1}$ です。

問題文の 3 行目～4 行目 P が A から B まで動くとき、この三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ。

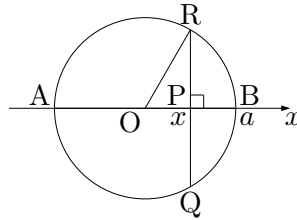
どんな立体か思い浮かびますか。ここに積分変数を表す軸（積分変数を x とするなら、 x 軸）を自分で設定します。設定した x 座標を用いて、 x 軸に垂

直に立体を切ったときの切り口の面積が x の関数として表せるように設定することになります。

先ほどの、「紙面に垂直に立てた二等辺三角形」が切り口になるように x 軸をとりましょう。

解答の 1 行目~2 行目

(積分変数軸の設定) 円の中心 O を原点に, 直線 AB を x 軸にとる。



解答の 3 行目~6 行目

(断面積 $S(x)$ を x の関数として表す) 点 P の座標を x とする。
三平方の定理より,

$$PR = \sqrt{OR^2 - OP^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$$

です。よって, 前ページの ① より,

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a^2 - x^2} \cdot h = h\sqrt{a^2 - x^2}$$

解答の 7 行目~8 行目

(断面積を積分して体積を求める) この計算は教科書の解答を見て下さい。

定積分の計算よりも, 空間図形の形を把握して, 積分変数軸 (x 軸) を設定し, 断面積を x の関数として表すまでが考えどころです。

【✿ 宿題 ✿】教科書 p.226 の 練習 36 を考えてください。明日はこの解答からはじめます。

第 25 日終わり