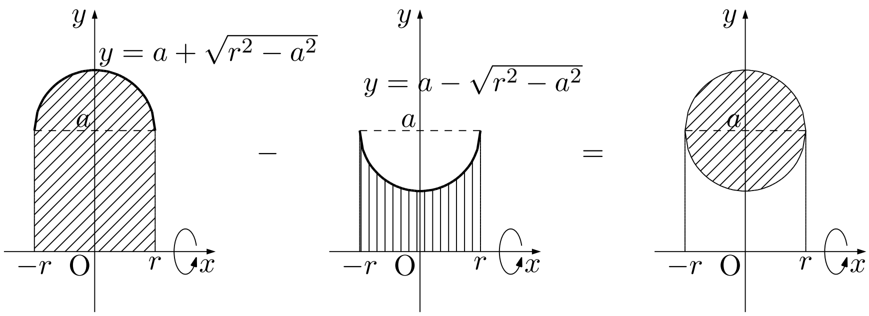
第 27 日：5 月 15 日（金） 教科書，LEGEND，ノートを用意して始めよう

応用例題 9 から始めます。円環体と呼ばれる立体の体積の計算です。円環体とは，教科書 p.228 の右下に描いてある絵のように，ドーナッツの形をした立体です。円環体の表面である曲面は円環面といいますが，トーラス（torus）とも呼ばれます。浮き輪のような曲面です。それに対して，中身の詰まった円環体は英語では solid torus といいます。

教科書 p.228
応用例題 9　$0 < r < a$ とする。円 $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

【解説】 問題で与えられた円は，中心 $(0, a)$，半径 r の円です。これまで体積を求めた回転体が，ある曲線と回転軸の間を埋め尽くす部分を軸の周りに回転していたのに対して，この円は回転軸から離れています。それを，これまで扱っていた回転体の体積の計算方法を組み合わせて求めようという問題です。アイディアは，次の図です。



この図を見ながら教科書の解答を読みましょう。必ず教科書を横に置いて，併せて読んでください。

解答の 1〜2 行目

円の方程式を y について解いて，円の上半分と下半分をグラフに持つ関数をそれぞれ $y =$ の形で表しています。

解答の 3〜11 行目

上の左と中央の図の回転体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とおき，定積分で表しています。

解答の 12〜13 行目

求める体積を，$V = V_1 - V_2$ と，x 軸との間が埋まっている回転体の体積か

ら不要な部分を引くという上図の考え方で計算しています。この計算で，V_1 と V_2 をそれぞれ積分計算してから引き算するのではなく，積分記号が残ったままの状態で引き算の式を書き，その段階でできるだけ式を整理して，最後に積分計算をしていることに注意してください。

$$(a+\sqrt{r^2-x^2})^2-(a-\sqrt{r^2-x^2})^2=4a\sqrt{r^2-x^2}$$

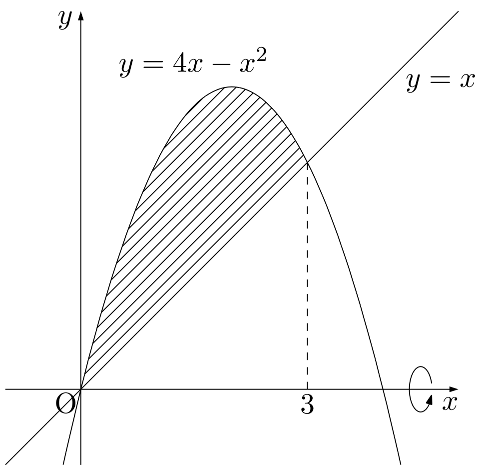
であるので，左辺の 2 項をそれぞれ別々に積分して引くよりも，右辺を積分する方が計算が易しくなります。なお，解答の中で積分 $\displaystyle\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi r^2$ は，半円の面積として計算は省略して既知の結果を使っています。

【✍ **問題練習**】 教科書 p.228 練習 39 および p.229 練習 40 を解いてください。

この後に解答を書きます。自分で計算してから読みましょう。

教科書 p.228
練習 39 放物線 $y=4x-x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

【**解答**】 $4x-x^2=x$ を解くと $x(x-3)=0$ より $x=0,3$。放物線と直線で囲まれた部分は次図の斜線部分である。



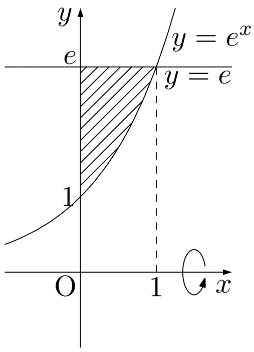
よって求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^3 (4x-x^2)^2\,dx - \pi\int_0^3 x^2\,dx \\ &= \pi\int_0^3 (x^4-8x^3+15x^2)\,dx \\ &= \pi\left[\frac{1}{5}x^5-2x^4+5x^3\right]_0^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{108}{5}\pi} \end{aligned}$$

教科書 p.229

$\boxed{\text{練習 40}}$ 曲線 $y=e^x$ と y 軸および直線 $y=e$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

【解答】 $e^x=e$ となるのは $x=1$ のときである。曲線 $y=e^x$ と y 軸および直線 $y=e$ で囲まれた部分は次図の斜線部分である。



よって求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi e^2 - \pi\int_0^1 (e^x)^2\,dx \\ &= \pi e^2 - \pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{e^2+1}{2}\pi} \end{aligned}$$

6　y 軸の周りの回転体の体積

前節では x 軸の周りに回転した回転体を扱っていました。y 軸の周りに回転した回転体の体積の計算も，同じ考え方で計算できます。回転軸を積分変数

軸にとるので，この場合 y に関する積分で表すことになります。また，積分変数軸に垂直な平面で立体を切った断面積を積分するので，この場合断面の円の半径は x 軸方向に伸びています。だから断面積は πx^2 と表せます。要するに x と y の役割が入れ替わっただけであとは同じです。

【✍ **問題練習**】 教科書 p.229 を自分で読んで，練習 41 を解いてください。

この下に解答を書きます。自分で計算してから読みましょう。

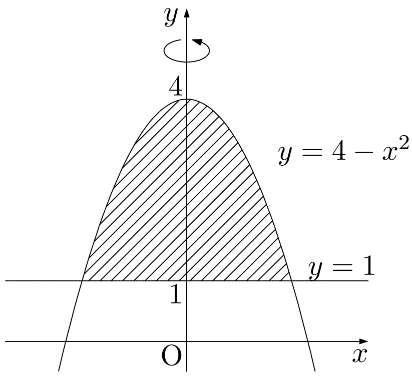
教科書 p.229

練習 41 次の曲線と直線で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

【解答】

（1）$y = 4 - x^2$，$y = 1$

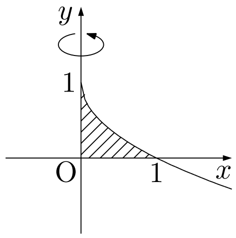
曲線と直線で囲まれた部分は次図の斜線部分である。



よって求める体積 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_1^4 x^2\,dy \\
&= \pi \int_1^4 (4 - y)\,dy \\
&= \pi \left[4y - \frac{1}{2}y^2 \right]_1^4 \\
&= \boldsymbol{\frac{9}{2}\pi}
\end{aligned}
$$

（2）$y = 1 - \sqrt{x}$，x 軸，y 軸
これらの曲線と直線で囲まれた部分は次図の斜線部分である。



よって求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^1 x^2\,dy \\ &= \pi\int_0^1 (1-y)^4\,dy \\ &= \pi\int_0^1 (y-1)^4\,dy \quad \text{（注 1）} \\ &= \pi\left[\frac{1}{5}(y-1)^5\right]_0^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{5}} \end{aligned}$$

(注 1) 計算の 2 行目から 3 行目に移るところで，$(1-y)^4 = (y-1)^4$ と，y の係数が 1 になるように書き直した。もしそのまま積分すれば

$$\pi\int_0^1 (1-y)\,dy = \left[-\frac{1}{5}(1-y)^5\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

で，もちろん同じ値になる。$(1-y)^4$ の不定積分は $-\dfrac{1}{5}(1-y)^5$ と，前に $-$ が出ることに注意。

体積の節まで終わりました。これまで月曜から土曜まで配信してきましたが，教科書の終わりが見えてきたこともあり，テキストの Classi 配信回数を月，火，水，金の 4 回に減らします。木曜の 2 限は前田先生が授業動画配信をしてくださいます。土日にはこれまでの復習，テキストに追いついていなければ土日を使って追いつく，それに教科書の補充問題や章末問題などで問題練習をしてください。

$\boxed{\text{第 }\mathbf{27}\text{ 日終わり}}$

∞ ∞ ∞

明日・明後日の土日で，週末課題および復習に取り組んでください。

【✍ **週末課題**】 教科書 p.236 $\boxed{\text{補充問題}}$ をノートに解きましょう。

以下に解答を書きます。自分で考えてから読んで下さい。

$\boxed{\text{補充問題}}$

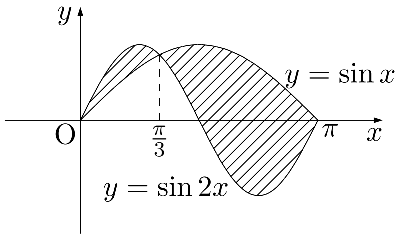
9. $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，2 つの曲線 $y = \sin x$，$y = \sin 2x$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

【**解答**】 2 曲線の共有点の x 座標を求める。

$\sin x = \sin 2x$ より $\sin x = 2\sin x \cos x$ だから $\sin x(1 - 2\cos x) = 0$

よって $\sin x = 0$ または $\cos x = \dfrac{1}{2}$。$0 \leqq x \leqq \pi$ より $x = 0, \dfrac{\pi}{3}, \pi$

面積を求める部分は次図の斜線部分である。



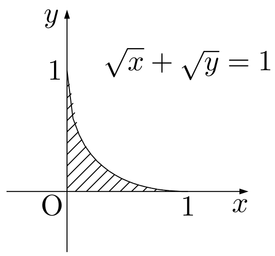
よって求める面積の和 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)\, dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\
&= \boldsymbol{\frac{5}{2}}
\end{aligned}
$$

10. 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

【解答】

$\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$ より $y=(1-\sqrt{x})^2$ となる。面積を求める部分は次図の斜線部分である。

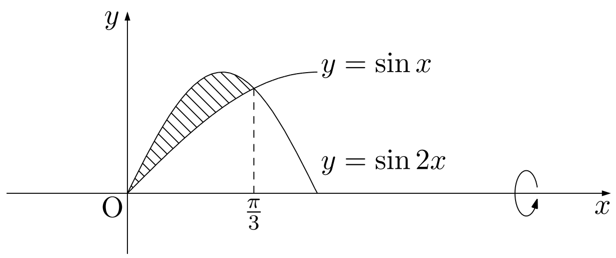


よって求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (1-\sqrt{x})^2\,dx \\ &= \int_0^1 (1-2\sqrt{x}^{\frac{3}{2}}+x)\,dx \\ &= \left[x-\frac{4}{3}x+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \mathbf{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

11. $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ の範囲において，2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=2\sin x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転しでできる回転体の体積 V を求めよ。

【解答】 2 つの曲線で囲まれた部分は次図の斜線部分である。

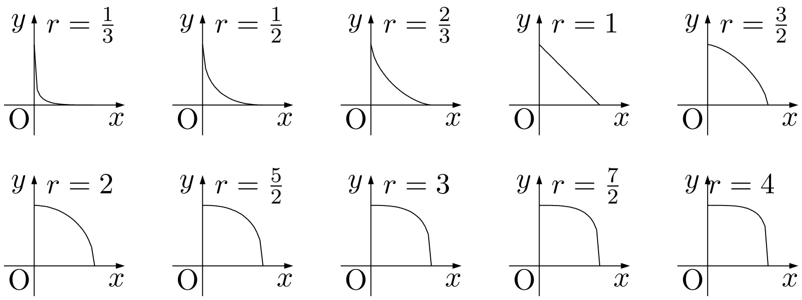


よって求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 2x\,dx - \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\,dx \\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx - \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right) dx \\ &= \pi\left[-\frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi} \end{aligned}$$

曲線 $x^r + y^r = 1$ の形

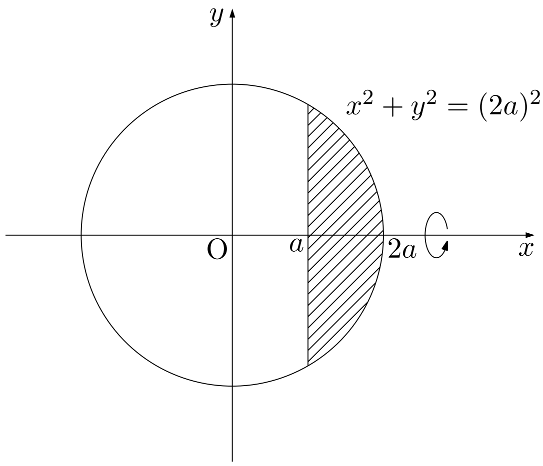
10 番では曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ が問題に表れた。これは，分数指数を使って表せば $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$ である。一般に，曲線 $x^r + y^r = 1$ の形がどうなるかを $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の範囲で描いてみると次のようになる。



$r = 1$ のときは $x + y = 1$ だから直線である（上段の右から 2 番目）。$r = 2$ のときは $x^2 + y^2 = 1$ だから円である（下段の左端）。こうやって並べてみると，r が 1 より小さくなればなるほど凹んだ形になり，r が 1 より大きくなればなるほど外側に向かって膨らんでくることがわかる。

補充問題の後の $\boxed{\text{Column}}$ も見ておきましょう。まず，自分で読んで,「容器からこぼれる水の量」を計算してみて下さい。以下，解答を書きます。

教科書 p.236
$\boxed{\text{Column}}$
半球形の容器いっぱいの水の量　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi(2a)^3=\dfrac{16}{3}\pi a^3$
残る水の量　これは，教科書の図のようにとった x 軸，y 軸を通常の向きにおくと次図のようになります。



この斜線部分が x 軸の周りに回転してできる回転体の体積が残る水の量

$$\pi\int_a^{2a}y^2\,dx=\pi\int_a^{2a}(4a^2-x^2)\,dx=\pi\left[4a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_a^{2a}=\frac{5}{3}\pi a^3$$

こぼれる水の量 $\dfrac{16}{3}\pi a^3-\dfrac{5}{3}\pi a^3=\boldsymbol{\dfrac{11}{3}\pi a^3}$（$\mathrm{cm}^3$）

$\boxed{\text{週末課題ここまで：第 27 日に配信}}$