第 28 日：5 月 18 日（月）　教科書，LEGEND，ノートを用意して始めよう

## 7　速度と位置（教科書 p.230）

教科書 pp.182 - 185,「速度と加速度」で，運動する点の座標を時刻の関数として表したとき，動点の座標を時刻で微分したものが速度，速度を時刻で微分したものが加速度であることを学んだ。思い出しておこう。

**速度と加速度（教科書 p.182）**

数直線上を運動する点 P の時刻 $t$ における座標 $x$ が $x = f(t)$ で表されるとき，時刻 $t$ における P の速度 $v$，加速度 $\alpha$ は

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t), \quad \alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

これは，座標を表す関数 $x = f(t)$ は，速度を表す関数 $v$ の原始関数であることを表している。このことを確認して，教科書 p.230，4 行目〜11 行目を読んでください。

定積分の計算法によって

$$\int_{t_1}^{t_2} v\,dt = \Big[f(t)\Big]_{t_1}^{t_2} = f(t_2) - f(t_1)$$

である。教科書ではこれを逆向きに書いてある。移項して

$$f(t_2) = f\,(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v\,dt \quad \text{（教科書 } p.230, 13 \text{ 行目）}$$

を得る。この式からは,

**時刻 $t_1$ における位置（座標）と，$t_1 \leqq t \leqq t_2$ における速度 $v$（$t$ の関数）がわかっていたら，時刻 $t_2$ における位置（座標）が積分で計算できる。具体的には，最初の時刻における座標 $f(t_1)$ に，区間 $t_1 \leqq t \leqq t_2$ における速度関数 $v$ の定積分を足したものが，到達点の座標 $f(t_2)$ である**

ということが読み取れる。例をみましょう。

教科書 p.230

$\boxed{\text{例 12}}$ 30 m/s の速さで地上から真上に打ち上げられた物体の $t$ 秒後の速度 $v$ m/s は，$v = 30 - 9.8t$ で与えられるという。ただし，$0 \leqq t \leqq 6$ である。打ち上げられてから 2 秒後における物体の高さ $h$ m は

$$h = \int_0^2 (30 - 9.8t)\,dt = \Big[30 - 4.9t^2\Big]_0^2 = 40.4(\mathrm{m})$$

【解説】 物体を投げ上げた地上の地点を原点にとり，鉛直上向きに座標軸をとる（教科書 p.230 例 12 の右の図参照）。このとき，座標が高さである。次のように分けて把握することができる。

（初期座標） 0 である。

（位置の変化量） $\displaystyle\int_0^2 v\,dt = \int_0^2 (30 - 9.8t)\,dt = \Big[30 - 4.9t^2\Big]_0^2 = 40.4(\mathrm{m})$

（到達点の座標） $\displaystyle 0 + \int_0^2 v\,dt = 40.4(\mathrm{m})$

このうち，真ん中の（位置の変化量）が速度の積分である。

《疑問》 ところで例 12 の問題文に,「ただし，$0 \leqq t \leqq 6$ である。」と書いてある。なぜ $t \leqq 6$ なのか，これにはどういう意味があるのか，わかりますか。あとでこの疑問に答えます。

この $\boxed{\text{例 12}}$ では速度が $v = 30 - 9.8t$ で与えられているものとして始まっているが，上で思い出したように速度の微分が加速度であったから，加速度から出発して問題を構成することができる。

【改題】 30m/s で地上から真上に打ち上げられた物体がある。鉛直上向きに座標軸をとる。この物体は加速度 $-g$ の等加速度運動に従うものとする。ただし，$g$ は重力加速度 $g = 9.8(m/s^2)$ である。このとき，打ち上げられてから 2 秒後の物体の高さを求めよ。

【解答】 $\dfrac{dv}{dt} = -g$ であるから，$v = -gt + C = -9.8t + C$（$C$ は積分定数）である。初速度が 30m/s すなわち $t = 0$ のとき $v = 30$ だから，$C = 30$ である。よって，$v = 30 - 9.8t$ である。これで $\boxed{\text{例 12}}$ で最初から与えられていた $v = 30 - 9.8t$ が出てきたので，あとは上の解説と同じ。

次に，この例で初速度を一般に $v_0$(m/s) として同じことを繰り返してみよう。

### 鉛直投げ上げ（重力加速度 $-g$ の下での運動）

地表上の点 O を原点にとり，鉛直上向きに座標軸 $y$ 軸をとる。点 O から真上に初速度 $v_0$ で打ち上げられた物体がある。この物体は加速度 $-g$ の等加速度運動に従うものとする。ただし，$g$ は重力加速度 $g = 9.8(m/s^2)$ である。このとき，$t$ 秒後の物体の速度，および，高さを求めよう。

速度は加速度の原始関数だから，$v = -gt + C$（$C$ は積分定数）である。初速度が $v_0$ だから，$t = 0$ のとき $v = v_0$ である。よって $C = v_0$ であり，

$$v = v_0 - gt$$

である。次に，座標は速度の原始関数だから，$y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 + C_1$（$C_1$は積分定数）と表せる。時刻 $t = 0$ のとき地上にいたから $y = 0$ であるので，$C_1 = 0$ となり，

$$y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

である。このように，鉛直投げ上げに対する速度や座標を時刻 $t$ の関数として表す式は，等加速度 $-g$ であることと初速度 $v_0$ だけから作ることができる。

**《疑問の答》** この投げ上げた物体が再び地上に落ちてくるのはいつだろうか。これは座標 $y$ が 0 になるときだから，$y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ のときである。よって $t(v_0 - \frac{1}{2}gt) = 0$ より $t = 0, \frac{2v_0}{g}$ である。$t = 0$ は投げ上げた最初の時点だから，再び落ちてくるのは $t = \frac{2v_0}{g}$ のときである。$\boxed{\text{例 12}}$ の場合，$v_0 = 30$ だから，$t = \frac{2 \cdot 30}{9.8} = \frac{60}{9.8}$ となる。すなわち $t = 6$ より少し大きい値である。これよりも $t$ が大きくなると，すでに地上に落ちておりそこで止まっているはずだ。だから $\boxed{\text{例 12}}$ の問題文では $t \leqq 6$ という条件をつけていたのである。地面に落ちてくるまでの，空中を運動している間に限定して考えていますよ，という意味だったのだ。これで教科書 p.230，14 行目～19 行目の 5 行がほぼ読めた。

**【✍ 問題練習】** 教科書 p.230 $\boxed{\text{練習 42}}$ をノートに解いてください。

この下に解答を書きます。自分で考えてから読んでください。

教科書 p.230

$\boxed{\text{練習 42}}$ 数直線上を運動する点 P の速度が，時刻 $t$ の関数として $v = 4 - 2t$ で与えられている。$t = 0$ における P の座標が 2 であるとき，$t = 3$ のときの P の座標を求めよ。

【解答】 求める座標を $x$ とすると，

$$x = 2 + \int_0^3 v\,dt = 2 + \int_0^3 (4 - 2t)\,dt = 2 + \Big[4t - t^2\Big]_0^3 = 5$$

したがって，$t = 3$ のときの P の座標は **5** である。□

## 8 数直線上を運動する点と道のり（教科書 p.231）

前項で速度の積分によって位置の変化量が求まるということを知った。座標が時刻の関数として $x = f(t)$ と表されているとき，時間の区間 $t_1 \leqq t \leqq t_2$ における位置の変化量とは $f(t_2) - f(t_1)$ であり，最初と最後の位置の差のことである。例えば，自宅から駅まで 10 分かけて歩いていき，10 分かけて引き返して自宅にもどったとき，この 20 分間における位置の変化は 0 となる。しかし，位置の変化ではなくどれだけの距離歩いたのかを知りたいこともあるだろう。この動いた距離を,「**道のり**」と呼んで，位置の変化量と区別する。

数直線（$x$ 軸）上の点の運動を考える際に，位置の変化を問題にする場合には，$x$ 軸の正の方向への移動は $+$ で表し，負の方向への移動は $-$ で表す。正の方向に 10 だけ移動し，続けて負の方向に 10 だけ移動した場合，位置の変化の計算では $10 + (-10) = 0$ と考える。つまり負の方向への 10 の移動は符号つきで $-10$ の移動として計算する。速度も，正の方向に毎秒 1m で移動するときには速度 1m/s とし，負の方向に毎秒 1m で移動するときには速度 $-1$m/s というように符号つきで向きまで込めて表す。

しかし，実質どれだけ動いたのか,「道のり」を知りたい場合には，正の方向であろうと負の方向であろうと 10 だけ動いたのなら $+10$ として移動距離を正の値で積み上げていく。速度についても同様に，向きによらず動いた距離をすべて正の値で積み上げていきたい場合には，**速度の絶対値 $|\boldsymbol{v}|$** を使う。

以上を頭において，教科書を読んでください。

**教科書 p.231，1 行目〜12 行目**

数直線上を運動する物体の速度を $v$ で表すとき， ある時刻の区間で $v \geqq 0$

ならば，道のりは $v$ の積分であり，$v \leqq 0$ ならば道のりは $-v$ の積分であることが説明されている。すなわち，**道のりは $|v|$ の積分** である。

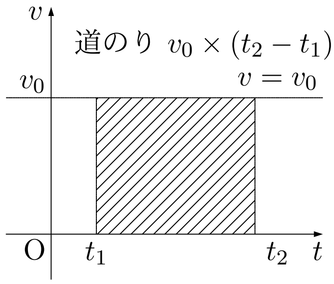
教科書 p.231

**例 13** 数直線上を運動する点 P の時刻 $t$ における速度 $v = 10-2t$ $(0 \leqq t \leqq 6)$ で与えられるとき，$t = 0$ から $t = 6$ までに P が通過する道のり $s$ を求める。

道のりは $|v|$ の積分。あとは計算するだけ。計算は教科書を見てください。

**教科書 p.231，20 行目，補足 ▶ の解説**

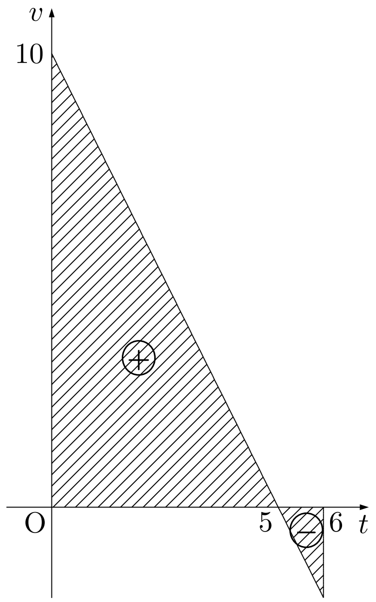
グラフに注目します。横軸に時間，縦軸に速度 $v$ をとったグラフを考えます。等速度 $v = v_0$ で運動する物体の時間-速度グラフを描くと次図のようになります。速度が正で一定の場合，位置の変化量は道のりと一致し，それは速度と時間の積です。時間-速度グラフでは斜線部の面積に対応します。

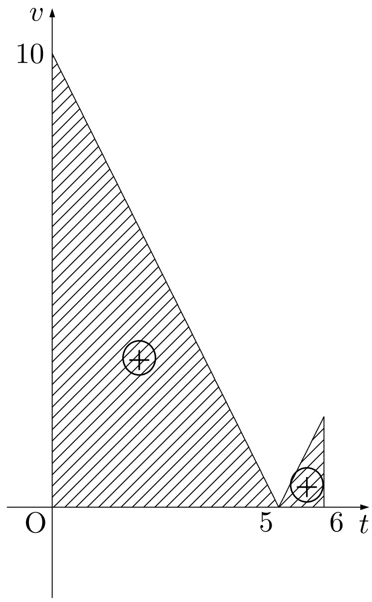



速度が変化する場合，時間の区間を分割して，各小区間の中では等速度と考えて小区間内での位置の変化量を積「速度 × 時間」で計算し，それらを足してから分割の数を増やし極限をとることで，定積分 $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v\,dt$ により位置の変化量が表せます。これは，$v = 10 - 2t$ の場合，次ページの図左の時間-速度グラフにおける斜線部分の符号つき面積（$x$ 軸より上の部分では面積，下の部分では面積の $-1$ 倍を足したもの）に対応します。時間-速度グラフにおいて符号つき面積と位置の変化量が対応しています。

道のりを求めたい場合には，どちら向きに進もうとすべて符号を正にして考えるので，速度を $|10 - 2t|$ にとります。グラフでは横軸より下の部分を横軸に関して対称に折り返した形になります。これが次図の右側の図です。

- 積分は面積・体積計算の他に，位置の変化量や道のりの計算にも使える。
- グラフを介し，面積計算と位置の変化量や道のりの計算が対応している。
- このように，一つの具体例だけにとらわれずに抽象化することで，より多くの様々な具体例に適用できる普遍的な「方法」が得られる。



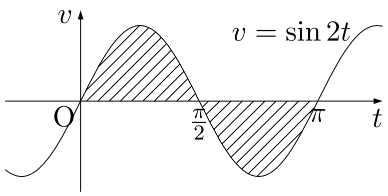




【✍ 問題練習】 教科書 p.231 $\boxed{\text{練習 43}}$ をノートに解いてください。

この下に解答を書きます。自分で考えてから読んでください。

$\boxed{\text{練習 43}}$ 数直線上を運動する点 P があり，時刻 $t$ における P の速度は $v = \sin 2t$ であるとする。$t = 0$ から $t = \pi$ までに P が通過する道のり $s$ を求めよ。

【解答】 $0 \leqq t \leqq \pi$ における $v = \sin 2t$ のグラフは次図のようになる。



$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $v \geqq 0$，$\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ において $v \leqq 0$ であるから，

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\pi} |\sin 2t|\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\sin 2t)\,dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= 1+1 \\ &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

今日はここまでにしましょう。明日は，平面上を運動する点について考えます。

$\boxed{\text{第 }\mathbf{28}\text{ 日終わり}}$