第 29 日：5 月 19 日（火） 教科書，LEGEND，ノートを用意して始めよう

9　座標平面上を運動する点と道のり（教科書 p.232〜p.233）

前回は数直線上を運動する点について考えました。今日は，平面上を運動する点について考えます。いつものように，まず教科書 p.232 の説明を自分で読んでください。それから，教科書を一緒に読んでいきましょう。

教科書 p.232

（平面上の動点の表現，2 行目〜4 行目） 座標平面上の点の位置は，座標 (x, y) で表される。点が動くとは，時間が経つにつれて位置が変わることだから，座標を時刻 t の関数として

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

と表すことにより表現できる。

（位置の変化量ではなく道のりを考える，5 行目〜6 行目） 前回直線上の点の運動に対して,「位置の変化量」と「道のり」を考えたが，今回は平面上の点の運動に対して「道のり」だけを考える。その理由は,「位置の変化」については x 座標と y 座標を分けてそれぞれについて直線運動の場合と同じことをすれば扱えるのにたいして,「道のり」については x 方向の変化と y 方向の変化が関連しあい，各座標ごとに直線運動の場合と同様，と言って済ませるわけにはいかないからである。

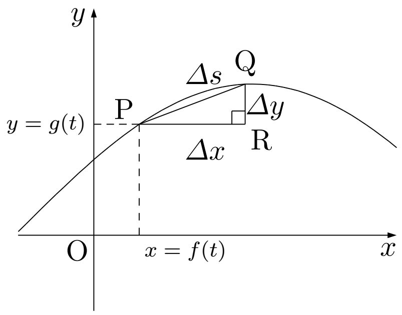
（点 P の軌跡である曲線を直線で近似する，7 行目〜16 行目） 基準となる時刻 t_1 を決めておき，そこから時刻 t までに点 P が通過した道のりを $s(t)$ で表す。道のりも時刻の関数であり，$s(t_1) = 0$ である。点 P が移動した軌跡は曲線を描く。時間の区間を分割し，ごく短い時間の中では曲線を直線で近似することを考える。そのために，ごく短い時間が経ったとしてその時間の増分を Δt で表す。それに対応する s，x，y の増分を Δs，Δx，Δy で表す。「対応する」の表す内容をはっきり書くと，

時刻が t から $t + \Delta t$ まで変化したとき，

$$\begin{aligned} \Delta s &= s(t + \Delta t) - s(t) \\ \Delta x &= f(t + \Delta t) - f(t) \\ \Delta y &= g(t + \Delta t) - g(t) \end{aligned}$$

である。教科書 p.232 の 2 つある図のうちの下の方を見てください。点 P の軌跡（青い線）の途中に，直角三角形が黒で書き加えられています。そこに

Δs と（黒で）書いてありますが，Δs は正確にはどの部分の長さかわかりますか。



Δs は P から Q までの間の**曲線部分の長さ**です。それを，**線分 PQ で近似しようと**しているのです。したがって，三平方の定理より

$$\Delta s \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

が成り立ちます。両辺を Δt で割って，

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \fallingdotseq \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

を得ます。ここまでは右辺は左辺を近似する式であり，完全に一致しているわけではありません。

（極限移行して道のりの時間微分を得る，17 行目〜18 行目）　ここで $\Delta t \to 0$ とした極限をとると，誤差が 0 に収束し，極限においては一致して次の等式を得ます。

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdots\cdots ①$$

これは，道のりを表す関数 $s(t)$ が右辺の関数の原始関数であることを示しています。

（道のりを定積分で表す，21 行目〜23 行目）　① を $t = t_1$ から $t = t_2$ まで定積分すると，

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \Big[s(t)\Big]_{t_1}^{t_2} = s(t_2) - s(t_1)$$

これは $s(t)$ の定義により，点 P が時刻 $t = t_1$ から $t = t_2$ までの間に通過した道のりです。教科書 p.232 の一番下の行に，これが逆向きの形で書いてあります。

（数直線上の場合との形式的類似，19 行目〜23 行目） 平面上の動点の動いた道のりを定積分で表す式は一見，数直線上の動点の場合とかなり違って見えるかもしれない。しかし，次のように見れば同じに見えてくる。

平面上の点の運動は，座標 (x, y) を時刻 t の関数とすることによって表せた。このとき，この運動の**速度ベクトル** $\overrightarrow{v}$ が

$$\overrightarrow{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

で定義された（教科書 p.184）。教科書のように単に速度といってかまわないが，1 つの数値ではなくベクトルになることを強調して速度ベクトルと呼んでおく。ベクトルの大きさは次のように定義された。

$$\left|\overrightarrow{v}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

したがって，道のりの計算に現れる積分の被積分関数は，速度ベクトルの大きさである。

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \left|\overrightarrow{v}\right| dt$$

このようにみると，数直線上の運動の場合と同じ形だと思えますね。教科書 p.232 の一番下の行には，この形も書いてあります。

教科書 p.233，1 行目〜5 行目

結果をまとめてある。単に結果を暗記するのではなく，式の形を見て，ここまでの導出の過程や，三平方の定理，ベクトルの大きさなどが式の中に反映していることを読み取れるようになりましょう。標語的に言葉でまとめれば「**速度の大きさの積分が道のり**」です。

$\boxed{\text{例題 17}}$ 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x = 2t^3$, $y = 3t^2$ で表されるとき，$t = 0$ から $t = \sqrt{3}$ までに P が通過する道のり s を求めよ。

まず自分で教科書の解答を読んでください。

【解説】 次の 3 ステップに分けて把握しましょう。

（速度ベクトルを求める） $\overrightarrow{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right) = (6t^2, 6t)$

（道のりを積分で表す） $s = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \left|\overrightarrow{v}\right| dt = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(6t^2)^2 + (6t)^2}\, dt$

（定積分を計算する）

教科書の解答をこの 3 ステップに分けて理解しましょう。ベクトル記号を使った形を答案に書かなければならないわけではありません。頭の中では，このような枠組み・捉え方で理解しておきましょう，という意味で整理しています。あとは，それぞれの計算が遂行できるかどうかです。これは練習を積むしかありません。

【✍ 問題練習】 教科書 p.233 $\boxed{\text{練習 44}}$ をノートに解いてください。

この下に解答を書きます。自分で考えてから読んでください。

$\boxed{\text{練習 44}}$ 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 (x, y) が

$$x = e^{-t}\cos\pi t,\quad y = e^{-t}\sin\pi t$$

で表されているとき，$t = 0$ から $t = 2$ までに P が通過する道のり s を求めよ。

【解答】

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -e^{-t}\cos\pi t + e^{-t}\cdot(-\pi\sin\pi t)\\ \frac{dy}{dt} &= -e^{-t}\sin\pi t + e^{-t}\cdot(\pi\cos\pi t)\end{aligned}$$

両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= e^{-2t}\cos^2\pi t + 2\pi e^{-2t}\cos\pi t\sin\pi t + \pi^2 e^{-2t}\sin^2\pi t\\ \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= e^{-2t}\sin^2\pi t - 2\pi e^{-2t}\sin\pi t\cos\pi t + \pi^2 e^{-2t}\cos^2\pi t\end{aligned}$$

辺々足すと

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= e^{-2t} + \pi^2 e^{-2t}\\ &= (1+\pi^2)e^{-2t}\end{aligned}$$

したがって

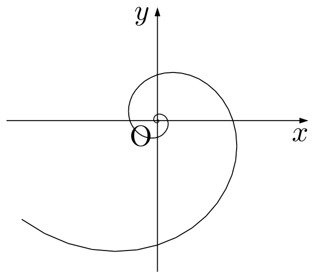
$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 \sqrt{(1+\pi^2)e^{-2t}}\,dt \\ &= \sqrt{1+\pi^2}\int_0^2 e^{-t}\,dt \\ &= \sqrt{1+\pi^2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^2 \\ &= \boldsymbol{\sqrt{1+\pi^2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)} \end{aligned}$$

（注 1）　道のりをいきなり積分で表して計算すると $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ の部分の計算がかなり重たくなる場合には，この解答のようにその部分の計算だけを取り出して先に整理しておくとよい。上の計算の中では $\cos^2\pi t+\sin^2\pi t=1$ によって途中複雑そうに見えた式が最終的には簡単に整理されている。

この運動の軌跡は教科書 p.233 のこの $\boxed{\text{練習 44}}$ の横に描いてある。

曲線 $(x,y)=e^{-t}(\cos\pi t,\sin\pi t)$ の形

教科書 $\boxed{\text{練習 44}}$ の点 P の軌跡である曲線 $x=e^{-t}\cos\pi t$，$y=e^{-t}\sin\pi t$ は，ベクトルの成分表示のように表せば $(x,y)=e^{-t}(\cos\pi t,\sin\pi t)$ となる。右辺は単位円上の回転運動を表す $(\cos\pi t,\sin\pi t)$ を e^{-t} 倍した形である。e^{-t} は t が大きくなるにつれて値が単調に減少して限りなく 0 に近づいていく。だから，この曲線はぐるぐるまわりながら半径がだんだん小さくなっていって原点に巻き付くように落ち込んでいくはずだ。コンピュータに描かせてみる。



このように，回転 × 実数倍と分解して考えることにより，式の形から曲線の形を読み取ることができる。

第 29 日終わり