第 **30** 日：**5** 月 **20** 日（水）　教科書，LEGEND，ノートを用意して始めよう

10　媒介変数表示された曲線の長さ（教科書 p.234）

平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 (x, y) を t の関数として $x = f(t)$，$y = g(t)$ と表すことで，運動を数学的に表現した。ここで,「時間」や「運動」という物理的意味を忘れ，$x = f(t)$，$y = g(t)$ を曲線の媒介変数表示としてみれば,「道のり」とは「曲線の長さ」である。

教科書 p.234 の内容は，前ページ，前々ページと同じ内容を，時間や運動という言葉を媒介変数や曲線という言葉に置き換えて繰り返しているだけに過ぎない。そう思って，教科書 p.234 を自分で読んでみてください。

【✍ 問題練習】 教科書 p.234 例題 18 を練習問題のつもりで自分で解いて，解答で答え合わせをしてください。

特に付け加えることはありません。微分計算，三角関数の計算，定積分の計算などが正確にできるかどうかを自問自答してみてください。

【✍ 問題練習】 教科書 p.234 練習 45 をノートに解いてください。

この下に解答を書きます。自分で解いてから読んでください。

練習 45 次の曲線の長さ L を求めよ。

$$x = 2(t - \sin t),\quad y = 2(1 - \cos t) \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

【解答】

$$\frac{dx}{dt} = 2(1 - \cos t)$$
$$\frac{dy}{dt} = 2\sin t$$

よって

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4(1 - 2\cos t + \cos^2 t)$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4\sin^2 t$$

辺々足して

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 4(1 - 2\cos t + 1) \\ &= 8(1 - \cos t) \\ &= 16 \cdot \frac{1 - \cos\left(2 \cdot \frac{t}{2}\right)}{2} \\ &= 16 \sin^2 \frac{t}{2} \\ &= \left(4 \sin \frac{t}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq 2\pi$ のとき $\sin \dfrac{t}{2} \geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} 4 \sin \frac{t}{2} \, dt \\ &= 4 \left[-2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \mathbf{16} \end{aligned}$$

サイクロイド

この $\boxed{\text{練習 45}}$ の曲線はサイクロイドですね。
サイクロイドについては，教科書の中で

面積　p.223 $\boxed{\text{応用例題 7}}$

曲線の長さ　p.234 $\boxed{\text{練習 45}}$

回転体の体積　p.238 $\boxed{\text{章末問題 B 13}}$

と，積分の応用として出てくる 3 種類の量すべてが扱われています。すなわち，教科書をしっかり読んで身に着けた高校生にとって，大学入試でサイクロイドの問題が出てきたらそれは，「教科書程度の問題」であり，「何度も繰り返しやったことのある問題が数字を変えて出てきた程度の問題」であるはずです。

11　曲線 $y = f(x)$ の長さ（教科書 p.235）

関数のグラフとして表された曲線 $y = f(x)$ の長さはどうやって計算すればいいだろうか。まず，教科書 p.235 を自分で読んでみてください。

（知っていること）媒介変数表示された曲線の長さの求め方
（知りたいこと）関数のグラフとして表された曲線 $y = f(x)$ の長さの求め方
（知りたいことを知っていることに） $y = f(x)$ を媒介変数表示できるか?

はい，次のようにすればできます。

$$\begin{cases} x = t \cdots\cdots ① \\ y = f(t) \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① を ② に代入すれば $y = f(x)$ に戻りますね。だから ①，② の媒介変数表示は，$y = f(x)$ と同じ内容を別の形で表しただけです。教科書にあるように

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

だから，$a \leqq x \leqq b$ に対応する部分の曲線の長さ L は，$dx = dt$ に注意して

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

となります。媒介変数表示された曲線の長さの特殊な場合です。

【✍ 問題練習】 教科書 p.235 $\boxed{\text{例題 19}}$ を練習問題のつもりで自分で解いて，解答で答え合わせをしてください。

解答には，特に付け加えることはありません。計算は大丈夫でしょうか。

【✍ 問題練習】 教科書 p.235 $\boxed{\text{練習 46}}$ をノートに解いてください。

この下に解答を書きます。自分で解いてから読んでください。

$\boxed{\text{練習 46}}$ 曲線 $y = x\sqrt{x}$ $(0 \leqq x \leqq 5)$ の長さ L を求めよ。

【解答】 $y = x^{\frac{3}{2}}$ であるから $y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ であり

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{9}{4}x$$

したがって

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx \\
&= \int_0^5 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&= \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5 \\
&= \frac{8}{27}\left(\frac{343}{8} - 1\right) \\
&= \mathbf{\frac{335}{27}}
\end{aligned}
$$

教科書 p.235，16 行目の**注意**に懸垂線（カテナリー）の式が出ている。

懸垂線（カテナリー）$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$（$a > 0$）

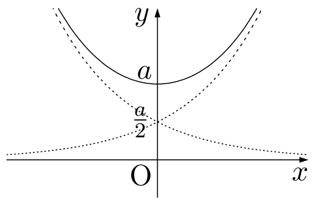
　この関数のグラフの形は，鎖のひもを両端を持ってゆるく垂らしたときにできる形であることが知られている。x に $-x$ を代入しても式全体は変わらないから偶関数であり，グラフは y 軸に関して対称である。

$$y' = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})$$

$y' = 0$ となるのは $x = 0$ のときに限り，$x < 0$ のとき $y' < 0$，$x > 0$ のとき $y' > 0$ である。増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	a	$\nearrow$

$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ のグラフを実線で，$y = \frac{a}{2}e^{\frac{x}{a}}$ のグラフと $y = \frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}}$ のグラフを点線で描くと次のようになる。



次回配信は 22 日（金）です。金，土，日で章末問題の残りを解きましょう。

第 30 日終わり