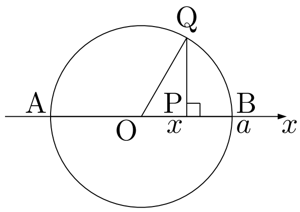
第 26 日：5 月 14 日（木） 教科書，LEGEND，ノートを用意して始めよう

では，昨日の宿題から始めましょう。

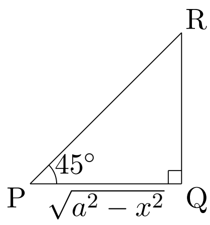
教科書 p.226

練習 36 底面の半径が a で高さも a である直円柱がある。この底面の直径 AB を含み底面と 45° の傾きをなす平面で，直円柱を 2 つの立体に分けるとき，小さい方の立体の体積 V を求めよ。

【解説】 この問題にははじめから図が描いてあります。これは非常に大きなヒントです。
（積分変数軸の設定）底面の円の中心を原点に，直線 AB を x 軸にとる。



（断面積を x の関数として表す） 線分 AB 上の，座標 x の点を P とする。P を通り x 軸に垂直な平面で体積を求める立体を切ったとき，切り口は直角二等辺三角形で，直角を挟む辺の一つが PQ である。



したがって，断面積 $S(x)$ は，

$$S(x)=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}^2=\frac{1}{2}(a^2-x^2)$$

（断面積を積分して体積を求める）体積 V は，

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)\,dx=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}(a^2-x^2)=\int_{0}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\boldsymbol{\frac{2}{3}a^3}$$

（注）3 つめの等号は，偶関数の積分の性質を使った。

5　x 軸の周りの回転体の体積

立体の中でも、特に回転体と呼ばれるものの体積の計算法を考えます。

教科書 p.226、21～24 行目

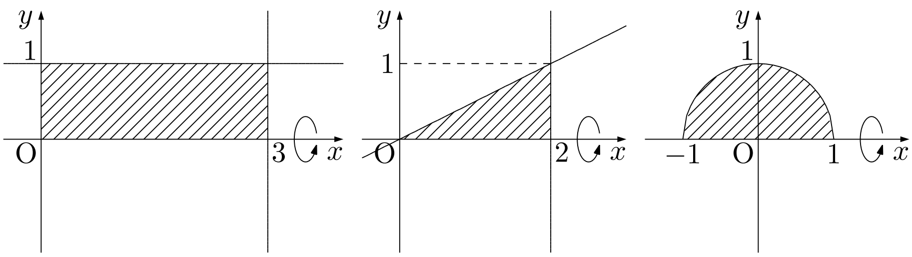
回転体という言葉の定義です。読んでください。意味がつかめたら，次の問いに答えてください。

問 次の回転体はどのような立体かを答えよ。

（1）直線 $y=1$ と x 軸，および直線 $x=0$，$x=3$ で囲まれた部分が x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体

（2）直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ と x 軸および直線 $x=2$ で囲まれた部分が x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体

（3）半円 $y=\sqrt{1-x^2}$ と x 軸で囲まれた部分が x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体



答 (1) 底面の半径が 1，高さが 3 の円柱
（2） 底面の半径が 1 ，高さが 2 の円錐
（3） 半径が 1 の球

教科書 p.227，１～4 行目

曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ （$a<b$）で囲まれた部分が x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を計算します。（図参照）
（積分変数軸を設定する） 回転軸を積分変数軸として選びます。x 軸とします。
（断面積を x の関数として表す） 回転体を回転軸に垂直に切ると断面は円。その半径は $|y|=|f(x)|$ で，断面積は $S(x)=\pi y^2=\pi\{f(x)\}^2$ です。
（断面積を積分して体積 V を求める） $V=\displaystyle\int_a^b \pi\{f(x)\}^2\,dx=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2\,dx$

教科書 p.227，5〜7 行目

結果をまとめてあります。前回までに扱った立体の体積の特別の場合にすぎません。π は積分変数とは無関係な定数だから積分記号の前に出して書いてありますが，π と積分記号の中にある y^2 あるいは $\{f(x)\}^2$ をかけて円の面積だということを忘れないようにしてください。

$$V = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx \text{（ただし，} a < b\text{）}$$

教科書 p.227

$\boxed{\text{例題 15}}$ 半径 r の球の体積は，$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ であることを示せ。

【解説】 結果だけなら覚えているはずのことです。球の体積の公式を導き出そう，と言うのがこの問題です。

解答の 1 行目〜3 行目

答案の中で球をどのように回転体とみなしているか，という説明を書いています。答案としては，半円を表す関数 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ と，回転軸が x 軸であることをはっきり書いておきましょう。

解答の 4 行目〜7 行目

積分計算です。上の 3 行がわかっていれば，機械的な計算です。

では，練習しましょう。

【✍ 問題練習】 教科書 p.227 $\boxed{\text{練習 37}}$，$\boxed{\text{練習 38}}$ をノートに解いて下さい。

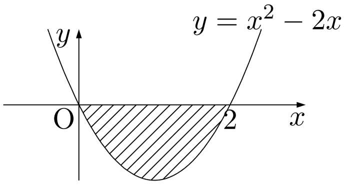
この下に解答を書きます。自分で計算してから答え合わせをしましょう。

教科書 p.227

$\boxed{\text{練習 37}}$ 次の曲線と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

（1） $y = x^2 - 2x$

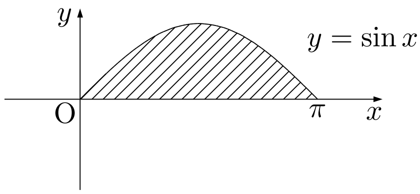
$x^2 - 2x = 0$ のとき $x(x-2) = 0$ より $x = 0, 2$



よって

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^2 y^2\,dx \\
&= \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2\,dx \\
&= \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2)\,dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2 \\
&= \boldsymbol{\frac{16}{15}\pi}
\end{aligned}
$$

（2）$y = \sin x$（$0 \leqq x \leqq \pi$）



よって

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^2 y^2\,dx \\
&= \pi \int_0^2 \sin^2 x\,dx \\
&= \pi \int_0^2 \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx \\
&= \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\pi} \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi^2}{2}}
\end{aligned}
$$

教科書 p.227

$\boxed{\text{練習 38}}$ $a>0$，$b>0$ とする。楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた図形が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

【解答】 $y^2=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ であるから，

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-a}^{a} y^2\,dx \\ &= \pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx \\ &= 2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a \\ &= 2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{2}{3}a^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi ab^2} \end{aligned}$$

（注 1） 回転体の体積を計算するときに必要になる断面積は πy^2 であり，ここには y は 2 乗の形で現れている。だから，楕円の方程式を（面積計算のときのように） $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ と y について解ききる必要はない。y^2 がわかれば十分である。

（注 2） 問題の楕円で，$a=b$ であれば半径 a の円である。このとき回転体は球になる。上の結果 $\dfrac{4}{3}\pi ab^2$ において，$a=b$ ならば確かに球の体積 $\dfrac{4}{3}\pi a^3$ になっている。

（注 3）a は 1 乗で，b は 2 乗と a，b について非対称だが，この違いはどこからきているのかを見ておこう。問題の楕円と x 軸の交点は $(-a,0)$，$(a,0)$ であり，x 軸に沿った楕円の軸の長さが $2a$ である。また y 軸との交点は $(0,-b)$，$(0,b)$ であり，y 軸に沿った楕円の軸の長さが $2b$ である。回転軸方向に現れる a はそのまま体積に反映し，それと垂直な（断面の半径）方向に現れる b は 2 乗が体積に反映している。

今日はこれまでにしましょう。明日は，教科書 p.228 の $\boxed{\text{応用例題 9}}$ から始めます。できれば，先に自分で読んでおいてください。

$\boxed{\textbf{第 26 日終わり}}$